(8)

This question paper contains **15** printed pages]

14/5/18

Roll No. | | | | | | | | | | | |

S. No. of Question Paper : **4405**

Unique Paper Code : **12271401** **HC**

Name of the Paper : **Intermediate Microeconomics-II**

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics CBCS**

Semester : **IV**

DESHBANDHU COLLEGE LIBRARY Kalkaji, New Delhi-19

Duration : **3 Hours** Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

(इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।)

Note : Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी : इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेज़ी **या** हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

The question paper is divided into *two* Sections

Attempt *four* questions in *all*, selecting *two* questions from **Section A** and *two* from **Section B**.

Use of simple calculator is permitted.

यह प्रश्नपत्र **दो** भागों में विभाजित है।

कुल मिलाकर **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिये, **दो** भाग अ और **दो** भाग ब में से।

साधारण कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति है।

Section A (भाग अ)

1. (*a*) In a two person (A and B) and two good (X and Y) pure exchange economy, the ordinal utility functions of the consumers A and B are given as :

$U_A\ (X_A,\ Y_A) = \frac{1}{4}\ln X_A + \frac{3}{4}\ln Y_A$ and $U_B\ (X_B, Y_B) = \min\ (X_B,\ Y_B)$,

P.T.O.

where X_A, X_B, Y_A, Y_B are the consumption of X and Y by consumers A and B respectively. A is endowed with (10, 0) whereas B is endowed with (0, 10).

(*i*) If A and B trade with each other using the competitive mechanism. Write the market clearing equation for X and thereby find the general equilibrium price ratio and allocation ?

(*ii*) Is the competitive equilibrium allocation equitable ? Why or why not ?

(*iii*) Is the competitive mechanism equilibrium allocation fair ? Why or why not ?

(*iv*) If the initial endowment were interchanged between A and B, then write the market clearing equation for Y and thereby find the competitive mechanism equilibrium price ratio and allocation ? Does any agent envy the other ?

(*b*) Is it possible to have a Pareto efficient allocation that is not equilibrium in a 2×2 exchange economy ? If yes, under what conditions ? Show in an Edgeworth box. 12+6.5

(अ) शुद्ध विनियम अर्थव्यवस्था में दो व्यक्ति (A तथा B) एवं दो वस्तु (X तथा Y) हैं। उपभोक्ताओं A तथा B के क्रमवाचक उपयोगिता फलन निम्नानुसार दिए गए हैं :

$U_A (X_A, Y_A) = \frac{1}{4}\ln X_A + \frac{3}{4}\ln Y_A$ तथा $U_B (X_B, Y_B) = \min (X_B, Y_B)$,

जहाँ X_A, X_B, Y_A, Y_B क्रमशः A तथा B द्वारा X तथा Y वस्तुओं का उपभोग है। A की सम्पन्नता (10, 0) द्वारा जबकि B की सम्पन्नता (0, 10) द्वारा दर्शायी गयी है।

(*i*) यदि A तथा B प्रतिस्पर्धी तंत्र का उपयोग करते हुए एक दूसरे के साथ व्यापार करते हैं, तो X के लिए बाजार समाशोधन समीकरण लिखिये तथा सामान्य संतुलन मूल्य अनुपात एवं आवंटन निकालिये।

(*ii*) क्या प्रतिस्पर्धी संतुलन आवंटन न्यायसंगत है? क्यों अथवा क्यों नहीं ?

(*iii*) क्या प्रतियोगी तंत्र संतुलन आवंटन निष्पक्ष है? क्यों अथवा क्यों नहीं ?

(*iv*) यदि A तथा B के बीच प्रारंभिक सम्पन्नता का आदान-प्रदान किया गया था, तो Y के लिए बाजार समाशोधन समीकरण लिखिए तथा इस प्रकार प्रतिस्पर्धी तंत्र संतुलन मूल्य अनुपात और आवंटन निकालिये। क्या कोई भी व्यक्ति दूसरे व्यक्ति से द्वेष रखता है।

(ब) क्या एक परेटो कुशल आवंटन संभव है जो कि 2 × 2 विनिमय अर्थव्यवस्था में संतुलन न हो? यदि हाँ, तो किन परिस्थितियों में? एक एजवार्थ बॉक्स में दिखाइये।

2. (*a*) Five persons A, B, C, D and E constitute a society having preferences regarding four alternatives w, x, y and z. The following table shows how each person ranks these alternatives from the best (topmost) to the worst (bottom most).

Person A	**Person B**	**Person C**	**Person D**	**Person E**
w	*z*	*z*	*w*	*y*
x	*y*	*x*	*y*	*z*
y	*x*	*w*	*x*	*w*
z	*w*	*y*	*z*	*x*

(*i*) If they vote first on *w* versus *x*, then vote on the winner of this first contest versus *y* and lastly they vote on the winner of second contest versus *z*, then which alternative is the final winner ?

(*ii*) If instead voting is done first on *w* versus *z* then on the winner and *x* and last on this winner versus *y*, which alternative wins ?

(*iii*) What do the answers to parts (*i*) and (*ii*) illustrate ?

(*iv*) If each person gives ranks of 1 (to his best), 2, 3 and 4 (to his worst) alternative then which alternative wins in this rank-order voting ?

(*b*) "Every point on the convex utility possibilities set can be welfare maximum". For what kind of welfare function is this statement true ? 15+3.5

(अ) किसी समाज में पाँच व्यक्ति A, B, C, D तथा E हैं जिनकी प्राथमिकताएँ चार विकल्पों *w*, *x*, *y*, और *z* के लिए हैं। निम्न तालिका में दिखाया गया है कि प्रत्येक व्यक्ति किस प्रकार इन विकल्पों को सर्वश्रेष्ठ (सबसे ऊपर) से निकृष्टतम (सबसे नीचे) क्रम देता है?

व्यक्ति A	व्यक्ति B	व्यक्ति C	व्यक्ति D	व्यक्ति E
w	z	z	w	y
x	y	x	y	z
y	x	w	x	w
z	w	y	z	x

(*i*) यदि पहले w तथा x में मतदान होता है, तत्पश्चात् उसके विजेता तथा y में मतदान होता है, और अंत में दूसरी प्रतियोगिता के विजेता एवं z में मतदान होता है, तो अंततः कौनसा विकल्प विजयी होगा?

(*ii*) इसके बजाय यदि पहले w तथा z में से किसी एक के लिए मतदान किया जाता है, इसके बाद यदि इनके विजेता तथा x में मतदान किया जाता है, एवं अंत में इनके विजेता तथा y के बीच मतदान किया जाता तो कौनसा विकल्प अंततः विजयी होगा?

(*iii*) भाग (*i*) तथा भाग (*ii*) के उत्तर क्या दर्शाते हैं?

(*iv*) यदि प्रत्येक व्यक्ति सर्वोत्तम विकल्प को रैंक 1, फिर 2, 3 तथा निकृष्टतम विकल्प को 4 रैंक देता है तो इस रैंक-क्रम मतदान में कौनसा विकल्प जीतेगा?

(ब) उन्नतोदर उपयोगिता संभावना समूह के प्रत्येक बिंदु पर कल्याण अधिकतम हो सकता है। किस कल्याणकारी फलन के लिए यह कथन सत्य है?

3. (*a*) A beekeeper chooses the number of hives 'H' to keep. Each hive produces one kilogram (kg) of honey which sells at a price of Rs. 60 per kg. The marginal cost of holding 'H' hives is : MC = 20 + 8H. The hives are located next to an apple orchard. The orchard owner benefits (without paying) from the bees because bees pollinate the trees and bees from one hive pollinate one acre of apple trees. The cost of artificial pollination is Rs. 24 per acre of apple trees.

(*i*) How many beehives 'H' will the beekeeper maintain ?

(*ii*) Is this the economically efficient number of beehives ? Explain.

(*iii*) What changes would lead to a socially effcient operation ?

(*iv*) How much subsidy should be given to the beekeeper for inducing him to produce socially efficient number of beehives ?

(*b*) Consider a plant that manufactures dynamite 'd'and a nearby farm producing tomatoes'*t*'. The cost of production of dynamite is :

$$T\ C_d\ (d,\ n) = \frac{1}{2}d^2 + (n - 2)^2$$

where '*d*' is the amount of dynamite produced and '*n*' is the intensity of use of a nitrogen in the production process. The side product associated with use of the nitrogen is ammonia - a fertilizer that is released into the air. Such fertilizer promotes growth of tomatoes making the production on the farm cheaper. In particular the higher the intensity '*n*' the lower the farmers cost : $T\ C_t\ (t,\ n) = \frac{1}{2}\ t^2 + 2t - nt.$

The prices of tomatoes and dynamite are $P_d = P_t$ = Rs.1

(*i*) Find the level of production of dynamite '*d*' and intensity '*n*' that maximizes the profit of the dynamite manufacturer. What is the maximal level of profit ?

(*ii*) Given the intensity '*n*' from (*i*) find the optimal level of production of tomatoes '*t*' and the profit of the farmer.

(*iii*) Find the joint profit of the dynamite manufacturer and the farmer.

(*iv*) Economists say that the positive externality is associated with too little activity, compared to the efficient outcome. Are your findings in this problem confirming this statement ? 9+9.5

(अ) एक मधुमक्खी पालक छत्तों की संख्या 'H' चुनता है। प्रत्येक छत्ता एक किलोग्राम शहद का उत्पादन करता है जिसकी कीमत 60 रुपए प्रति किलोग्राम है। मधुमक्खी पालन की सीमांत लागत MC = 20 + 8H है। छत्ते एक सेब के बगीचे के आस-पास हैं। बगीचे का मालिक मधुमक्खियों से लाभ प्राप्त करता है क्योंकि प्रत्येक मधुमक्खी का छत्ता एक एकड़ के सेब के पेड़ों में परागण करता है। कृत्रिम साधनों द्वारा परागण करने की लागत Rs. 24 प्रति एकड़ है।

(*i*) मधुमक्खीपालक कितने छत्ते बनाये रखेंगे?

(*ii*) क्या छत्तों की संख्या आर्थिक रूप से कुशल संख्या है? व्याख्या कीजिये।

(*iii*) कौनसे परिवर्तन एक सामाजिक रूप से कुशल संचालन को प्रेरित करेगा?

(*iv*) मधुमक्खी पालक को सामाजिक रूप से कुशल मधुमक्खियों के छत्ते का उत्पादन करने हेतु कितनी आर्थिक सहायता (सब्सिडी) दी जानी चाहिए ?

(ब) एक डायनामाइट '*d*' उत्पादक और उसके नजदीक एक फार्म पर विचार कीजिये। डायनामाइट की लागत है : $T C_d (d, n) = \frac{1}{2}d^2 + (n - 2)^2$

जहाँ '*d*' डायनामाइट की मात्रा है और '*n*' नाइट्रोजन की तीव्रता है जो डायनामाइट उत्पादन में प्रयोग होती है। नाइट्रोजन के साथ अमोनिया गौण उत्पाद है जो एक खाद है और हवा में रिहा होती है। इस तरह की खाद टमाटर के उत्पादन को बढ़ाती है और फार्म लागत को कम करती है, खास तौर पर '*n*' की तीव्रता के अनुसार किसान की लागत कम होती है : $T C_t (t, n) = \frac{1}{2} t^2 + 2t - nt.$

$P_d = P_t$ = Rs. 1 डायनामाइट और टमाटर की कीमत है।

(*i*) डायनामाइट का उत्पाद और '*n*' की तीव्रता निकालिये जिस पर डायनामाइट उत्पादक का लाभ सबसे अधिक होता है।

(*ii*) '*n*' की तीव्रता अगर (*i*) के अनुसार है तो टमाटर का इष्टतम उत्पादन कितना होगा और किसान का लाभ कितना होगा?

(*iii*) डायनामाइट-उत्पादक और किसान का संयुक्त लाभ निकालिये।

(*iv*) अर्थशास्त्रियों का कहना है कि इष्टतम परिणाम की तुलना में सकारात्मक बाह्यता कम उत्पादन के साथ जुड़ी है। इस बयान की पुष्टि करने वाली इस समस्या में आपके निष्कर्ष क्या हैं?

4. (*a*) Ann (A) and Bobby (B) share an apartment. They spend some of their income on private goods separately and some of their incomes on public good like TV. A's utility function is : $U_A(X_A, G) = G^{1/4}X_1^{3/4}$ and B's utility function is : $U_B(X_B, G) = G^{1/2}X_B^{1/2}$, where X_A and X_B are the quantities consumed of private goods by Ann and Bobby and G is the size of the public good, where, $G = g_A + g_B$, the contribution of A

and B for buying TV. Both Ann and Bobby have income of (W_A and W_B respectively) Rs. 2000 each per month. Price of public good is given as, $P_G = 100$ and price of private good is given as, $P_X = 1.P_G$ reflects the marginal cost of public good.

(*i*) Write the conditions for the provision of the Pareto efficient amount of public good assuming both Ann and Bobby can pool their resources.

(*ii*) Find the optimum size of G for the provision of the public good assuming $X_A = X_B$.

(*b*) There are two types of workers in the labour market, high ability workers and low ability workers. Let education be a signal to the firms and firms pay each type of worker according to their marginal product. A successful signal causes high ability workers to receive W_H and low ability workers to receive W_L. In particular, the cost of acquiring education 'C' for workers is Rs 15,000, W_H = Rs. 40,000 and W_L = Rs. 20,000. β is the proportion of high ability workers.

(*i*) If there is a pooling equilibrium in the model, what should be the proportion of high ability worker, β.

(*ii*) What kind of equilibrium will occur if the cost of acquiring education is less than Rs.15,000, assuming β as above ? 9.5+9

(अ) एन तथा बॉबी एक मकान में साथ रहते हैं। वे अपनी आय का कुछ भाग निजी वस्तुओं पर अलग-अलग खर्च करते हैं तथा कुछ भाग सार्वजनिक वस्तु पर जैसे कि टेलीवीजन। एन का उपयोगिता फलन $U_A(X_A, G) = G^{1/4}X_1^{3/4}$ तथा बॉबी का उपयोगिता फलन $U_B (X_B, G) = G^{1/2}X_B^{1/2}$, है जहाँ X_A तथा X_B क्रमशः एन तथा बॉबी द्वारा उपभोग की गयी निजी वस्तुएं हैं एवं G सार्वजनिक वस्तु का आकार है तथा $G = g_A + g_B$, है। एन तथा बॉबी दोनों की मासिक आय (क्रमश W_A तथा W_B) Rs. 2,000 है। सार्वजनिक वस्तु की कीमत $P_G = 100$ तथा निजी वस्तु की कीमत $P_X = 1. P_G$ सार्वजनिक वस्तु की सीमान्त लागत दर्शाती है।

(*i*) सार्वजनिक वस्तु की पेरेटो कुशल मात्रा के प्रावधान की शर्तें लिखिये यदि एन और बॉबी दोनों अपने संसाधनों को इकट्ठा मिला सकते हैं।

P.T.O.

(*ii*) $X_A = A_B$ मानते हुए सार्वजनिक वस्तु के प्रावधान के लिए G का कुशल आकार ज्ञात कीजिए।

(ब) श्रम बाजार में दो प्रकार के श्रमिक हैं, उच्च क्षमता वाले श्रमिक तथा कम क्षमता वाले श्रमिक। मान लीजिये शिक्षा फर्मों के लिए एक संकेत है तथा फर्म प्रत्येक प्रकार के श्रमिक को सीमान्त उत्पाद के अनुसार भुगतान करती है। एक सफल संकेत उच्च क्षमता वाले श्रमिकों को W_H तथा कम क्षमता वाले श्रमिकों को W_L प्राप्त करने का कारण बनता है। विशेष रूप से श्रमिकों के लिए शिक्षा 'C' प्राप्त करने की लागत 15,000 रुपये है, W_H = Rs. 40,000, W_L = Rs. 20,000 तथा β उच्च क्षमता वाले श्रमिकों का अनुपात है।

(*i*) अगर मॉडल में इकट्ठा (पूलिंग) संतुलन है, तो उच्च क्षमता वाले कार्यकर्ताओं का अनुपात, β क्या होगा।

(*ii*) यदि शिक्षा प्राप्त करने की लागत 15,000 रूपये से कम है, तब किस तरह का संतुलन होगा यदि β को उपरलिखित की तरह मान लिया जाय।

Section B (भाग ब)

5. (*a*) Mr. Gnash, who will distribute Rs. 4 between two people A and B, asks them to simultaneously write any whole number between 0 and 4 on a piece of paper. If the sum of the two numbers is at most 4 then both will get the numbers of rupees they have written. If the sum exceeds 4 and both have written the same number then both will get Rs. 2 else the one who has written the smaller number will get the number of rupees he has written and the other will get 4 minus this amount. Determine the best response of each player to each of the other player's actions, plot them in a dot-circle best response diagram, and thus find the Nash equilibria of this game.

(*b*) Consider the following game :

		Player B	
		L	R
Player A	U	2,4	1,0
	D	0,1	4,5

(*i*) Find out mixed strategy Nash equilibrium of the game if the game is played simultaneously.

(*ii*) Draw the extensive form for this game and find out sub-game perfect Nash equilibrium if the game is sequential and player A plays first.

(*iii*) Are the Pure strategy Nash equilibrium of the game strict equilibria ? Explain giving definition of strict equilibrium. 10+9

(अ) मि. जीनैश, दो व्यक्ति A तथा B के बीच Rs. 4 वितरित करता है। उन्हें एक साथ कागज के एक टुकड़े पर 0 तथा 4 के बीच कोई भी पूर्णांक संख्या लिखने के लिए कहता है। यदि दो नंबरों की संख्याओं का योग अधिकतम 4 है तो दोनों को उनके द्वारा लिखी गयी संख्या के बराबर रुपये मिल जायेंगे। यदि राशि का योग 4 से अधिक है तथा दोनों ने एक ही नंबर लिखा है, तो दोनों को 2 रुपये मिलेंगे। यदि राशि का योग चार से अधिक है और दोनों ने अलग संख्या लिखी है तो जिसने छोटी संख्या लिखी है उसे वह संख्या मिलेगी और दूसरे को बाकी राशि मिलेगी। प्रत्येक खिलाड़ी के सर्वोत्तम प्रतिक्रिया का निर्धारण कीजिये, उन्हें डॉट-सर्कल आरेख में बनायें, और इस प्रकार इस खेल का नैश संतुलन खोजें?

(ब) निम्न खेल पर विचार कीजिये :

		खिलाड़ी B	
		L	R
खिलाड़ी A	U	2,4	1,0
	D	0,1	4,5

(*i*) यदि खेल एक साथ खेला जाता है, तो मिश्रित रणनीति नैश संतुलन का पता लगाइये।

(*ii*) खेल को व्यापक रूप में प्रस्तुत कीजिये तथा उप-खेल परिपूर्ण नैश संतुलन ज्ञात कीजिये यदि खेल अनुक्रमिक है तथा पहले खिलाड़ी A खेलता है।

(*iii*) क्या खेल का शुद्ध रणनीति नैश संतुलन कठोर संतुलन है? कठोर संतुलन की परिभाषा देते हुए समझाइये।

6. (*a*) Two people are engaged in a joint project. If each person *i* puts in the effort X_i, a non-negative number equal to at most 1, which costs them C $(X_1) = X_1$ and C $(X_2) = X_2$, the outcome of the project is worth $F(X_1,X_2)= 4X_1X_2$. The worth of the project is split equally between the two people irrespective of the effort levels.

(*i*) Find the best response function of the two players.

(*ii*) Make the best response function diagram and find the Nash equilibria of the game.

(*iii*) What are the payoffs of the players at these equilibria ?

(*iv*) Which pair of effort level, the payoffs to the players is highest ?

(*b*) Consider the game below :

		Player 2	
		L	R
Player 1	T	4, 8	0, 0
	B	8, 20	X, Y

(*i*) In a simultaneous game, if (B, R) is the only Nash equilibrium of this game, what must be true of X and Y?

(*ii*) Present the game in extensive form. If this game is played sequentially, identify all sub-games with Player 1 moving first.

(*iii*) Assuming (B,R) is the sub-game perfect Nash equilibrium (SPNE) outcome, what must be true of X and Y ?

10+9

(अ) दो लोग एक संयुक्त परियोजना में लगे हैं। यदि प्रत्येक व्यक्ति *i* प्रयत्न X_i, एक गैर–नकारात्मक संख्या जो अधिकतम 1 के बराबर है, उसकी लागत C $(X_1) = X_1$ तथा C $(X_2)= X_2$ है। इस परियोजना का परिणाम F $(X_1, X_2) = 4X_1X_2$ के मूल्य के बराबर है। परियोजना के मूल्य को प्रयास स्तर के निरपेक्ष दो लोगों के बीच समान रूप से विभाजित किया जाता है।

(*i*) दो खिलाड़ियों के सर्वश्रेष्ठ प्रतिक्रिया फलन ज्ञात कीजिये।

(*ii*) सर्वश्रेष्ठ प्रतिक्रिया फलन आरेख बनाइये तथा खेल के सभी नैश संतुलनों को ज्ञात कीजिए।

(*iii*) इन संतुलनों पर खिलाड़ियों की अदायगी क्या है?

(*iv*) प्रयास स्तरों का कौनसा समूह, खिलाड़ियों के लिए सर्वाधिक लाभकारी है?

(ब) निम्नलिखित खेल पर विचार कीजिये :

		खिलाड़ी 2	
		L	R
खिलाड़ी 1	T	4,8	0,0
	B	8,20	X,Y

(*i*) एक समकालिक खेल में, यदि (B, R) इस खेल का एकमात्र नैश संतुलन है, तो X तथा Y के बारे में क्या सच होना चाहिए?

(*ii*) खेल को व्यापक रूप में प्रस्तुत कीजिये। यदि यह खेल क्रमिक रूप से खेला जाता है, उन सभी उप-खेल की पहचान कीजिये, जिसमें खिलाड़ी 1 पहले चलता हो।

(*iii*) मान लें (B, R) उप-खेल परिपूर्ण नैश संतुलन (SPNE) का परिणाम है, तो X तथा Y के बारे में क्या सत्य होना चाहिए?

7. A monopolist's inverse demand for the good is given by $P(Q) = 100 - Q$ and cost is given by $C(Q) = 0$. Consider three cases.

Case-1

Suppose that monopolist can perfectly price discriminate among the consumers.

(*i*) What is monopolist's profit in that case ?

(*ii*) Is the allocation Pareto efficient ?

(*iii*) Calculate the consumer surplus ?

Case-2

Now suppose that Monopolist can charge different prices on two segments of the market with different demand curves. The demands on two segments are :

$$Q_1(P_1) = 50 - \frac{4}{5}P_1 \text{ and } Q_2(P_2) = 50 - \frac{1}{5}P_2.$$

(*iv*) Find out equilibrium price and quantity if the firm practices third degree price discrimination.

Case- 3

If the Monopolist is not allowed to price discriminate and has to charge a single price from all consumers.

(*v*) What would be the equilibrium price and quantity in this case ?

(*vi*) Compare producer's and consumer's surplus in the three cases: perfect price discrimination, third degree price discrimination and uniform price. 19

एक एकाधिकार के लिए विपरीत माँग $P(Q) = 100 - Q$ द्वारा दी गई है और लागत $C(Q) = 0$ द्वारा दी गई है। तीन स्थितियों पर विचार कीजिये।

स्थिति एक

मान लीजिए कि एकाधिकारी उपभोक्ताओं के बीच पूर्ण कीमत विभेद कर सकता है।

(*i*) इस स्थिति में एकाधिकारी का लाभ क्या है?

(*ii*) क्या आवंटन पेरेटो कुशल है?

(*iii*) उपभोक्ता अधिशेष क्या है?

स्थिति दो

अब मान लीजिए कि एकाधिकारी बाजार के विभिन्न माँग वक्र वाले दो खण्डों से विभिन्न मूल्य वसूल सकता है। दो खंडों की माँग $Q_1(P_1) = 50 - \frac{4}{5}P_1$ तथा $Q_2(P_2) = 50 - \frac{1}{5}P_2$ है।

(*iv*) यदि फर्म कीमत विभेद की तीसरी श्रेणी का प्रयोग करती है तो संतुलन मूल्य और मात्रा ज्ञात कीजिये।

स्थिति तीन

यदि एकाधिकारी को मूल्य विभेद करने की अनुमति नहीं है तथा सभी उपभोक्ताओं से एक ही कीमत वसूलनी है तो :

(*v*) इस स्थिति में संतुलन मूल्य और मात्रा क्या होगी?

(*vi*) पूर्ण कीमत विभेद, तीसरी श्रेणी का कीमत विभेद, और समान कीमत जैसी इन तीन स्थितियों में उत्पादक और उपभोक्ता के अधिशेष की तुलना कीजिये।

8. (*a*) Two firms (A and B) compete setting the quantity. They face the market inverse demand $P = 200 - Q$, where $Q = q_A + q_B$, and they both have a marginal cost : $MC = 20$.

(*i*) Find the Cournot-Nash equilibrium.

(*ii*) How would the equilibrium change if the government decides to subsidise Firm A with 12 per unit making $MC_A = 8$ whereas, $MC_B = 20$.

(*iii*) How would the equilibrium quantities and prices change if there were three identical firms with MC = 20 ?

(*b*) Consider Hotelling's model where two petrol stations labeled A and B are located along a street length of 1 km. Assume that consumers are uniformly distributed along the street length. Each consumer has a transportation cost equal to 2d, where 'd' is the distance traveled back to one's house after filling up petrol. Suppose that A is located at 1/4 of a km and B is located at 1 km. Assume that production is costless.

(*i*) Determine the demand functions Q_A and Q_B for the two petrol stations.

(*ii*) If the two petrol stations compete in prices (P_A and P_B) and settle at Nash equilibrium, will they charge the same price for petrol ?

(*iii*) What will be the profits of the two Petrol stations ? 7+12

(अ) दो फर्में (A तथा B) मात्रा निर्धारित करने के लिए प्रतिस्पर्धा करते हैं। वे बाजार व्युत्क्रम माँग का सामना करते हैं। $P = 200 - Q$, जहाँ $q_A + q_B$ तथा दोनों के लिए सीमांत लागत है : MC = 20

(*i*) कुर्नोट-नैश संतुलन ज्ञात कीजिये।

(*ii*) संतुलन में किस प्रकार परिवर्तन होगा यदि सरकार फर्म A को प्रति यूनिट 12 की आर्थिक सहायता (सब्सिडी) देने का निर्णय करती है तथा $MC_A = 8$ जबकि $MC_B = 20$ हो जाती है।

(*iii*) संतुलन मात्रा और कीमतों में किस प्रकार परिवर्तन होगा यदि तीन एक-समान फर्में हैं जिनकी सीमान्त लागत $\dot{M}C = 20$ है ?

(ब) होटेलिंग मॉडल पर विचार कीजिये जहाँ A तथा B दो पेट्रोल स्टेशन 1 किमी लम्बी सड़क पर स्थित हैं। मान लीजिए कि उपभोक्ता समान रूप से सड़क पर वितरित है। प्रत्येक उपभोक्ता की परिवहन लागत 2d के बराबर है, जहाँ 'd' पेट्रोल भरने के बाद घर वापस जाने की दूरी है। मान लीजिए कि A 1/4 किमी पर स्थित है तथा B 1 किमी पर स्थित है। ऐसा मानें कि उत्पादन लागत रहित है।

(*i*) दोनों पेट्रोल स्टेशनों के लिए माँग फलन Q_A और Q_B निर्धारित कीजिये।

(*ii*) यदि दोनों पेट्रोल स्टेशन कीमतों (P_A तथा P_B) में प्रतिस्पर्धा करते हैं एवं नैश के संतुलन में स्थिर होते हैं, तो क्या वे पेट्रोल के लिए एक ही कीमत वसूलेंगे?

(*iii*) दोनों पेट्रोल स्टेशनों का लाभ क्या होगा?

This question paper contains 8+4 printed pages]

(9)

19/5/18

Roll No. | | | | | | | | | | |

DESHBANDHU COLLEGE
LIBRARY
Kalkaji, New Delhi-19

S. No. of Question Paper : **4622**

Unique Paper Code : **12271402 HC**

Name of the Paper : **Intermediate Macroeconomics II**

Name of the Course : **B.A. (H) Economics CBCS**

Semester : **IV**

Duration : **3 Hours** Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी : इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेज़ी **या** हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

Attempt *All* questions, selecting any *two* parts from each question.

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों के उत्तर दीजिए।

P.T.O.

1. (*a*) (*i*) Show that in the endogenous growth model a permanent change in the share of population employed in research does not change the long run rate of technological progress.

(*ii*) Examine under what circumstances, a constant research effort can sustain long run growth in the economy. 5+2.5

(*b*) (*i*) Allowing firms to charge a price above the marginal cost is important to promote innovations in the economy. Explain. 3

(*ii*) Consider an economy with a fixed saving rate and no technological progress. Suppose there is a war that does not directly affect the capital stock but the casualties reduce the labour force. What is the immediate impact on total output and on output per worker? Assuming that the saving rate is unchanged and that the economy was in a steady state before the war, what happens subsequently to output per worker in a post war economy ? Does the growth rate of output per worker increase or decrease after the war ? 2 +1.5+1

(*c*) An economy has the production function $Y = 0.5\sqrt{K}\sqrt{L}$.

(*i*) What is the per worker production function ?

(*ii*) In terms of the saving rate '*s*' and the depreciation rate 'δ', derive steady state levels of capital per worker, output per worker and consumption per worker.

(*iii*) Suppose that $\delta = 5\%$. What is the steady state output per worker and consumption per worker when $s = 10\%$.

(*iv*) What is the Golden Rule steady state level capital stock per worker when $\delta = 5\%$? 1+3+2+1.5

(*a*) (*i*) दर्शाइए कि अन्तर्जात (endogenous) वृद्धि मॉडल में, शोध में लगे हुए जनसंख्या के अंश में स्थायी परिवर्तन, प्रौद्योगिकीय प्रगति की दीर्घकालीन दर को परिवर्तित नहीं करती है।

(*ii*) किन परिस्थितियों में एक स्थिर शोध प्रयास, अर्थव्यवस्था में दीर्घकालीन वृद्धि को बनाए रख सकता है, परीक्षण कीजिए।

(*b*) (*i*) फर्मों को सीमान्त लागत से अधिक कीमत वसूल करने देना अर्थव्यवस्था में नवाचार (innovation) को बढ़ावा देने हेतु महत्वपूर्ण है। समझाइए।

(*ii*) स्थिर बचत दर व बिना प्रौद्योगिकीय प्रगति वाली एक अर्थव्यवस्था पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि एक युद्ध पूंजी स्टॉक को सीधे तौर पर प्रभावित

नहीं करता पर लोगों के हताहत होने (casualties) के कारण श्रमशक्ति कम हो जाती है। कुल उत्पाद व प्रति श्रमिक उत्पाद पर तुरन्त प्रभाव क्या है ? यह मानते हुए कि बचत दर अपरिवर्तित रहती है तथा युद्ध से पहले अर्थव्यवस्था स्थिरावस्था (steady state) में थी, बताइए कि युद्ध के बाद प्रति श्रमिक उत्पाद पर क्या प्रभाव पड़ता है ? प्रति श्रमिक उत्पाद की वृद्धि दर युद्ध के बाद बढ़ती है या कम होती है ?

(c) किसी अर्थव्यवस्था में उत्पाद फलन $Y = 0.5\sqrt{K}\sqrt{L}$ है।

(i) प्रति श्रमिक उत्पादन फलन क्या है ?

(ii) बचत दर 's' व पूँजी की ह्रास दर 'δ' के पदों में प्रति श्रमिक पूँजी, प्रति श्रमिक उत्पाद व प्रति श्रमिक उपभोग के स्थिरावस्था (steady state) वाले स्तर व्युत्पन्न कीजिए।

(iii) मान लीजिए कि $\delta = 5\%$ जब $s = 10\%$ हो तो प्रति श्रमिक उत्पाद व प्रति व्यक्ति उपभोग के स्थिरावस्था वाले स्तर क्या होंगे ?

(iv) जब $\delta = 5\%$ है तो प्रति श्रमिक पूँजी स्टॉक का स्वर्णिम नियम (golden rule) स्थिरावस्था स्तर क्या होगा ?

2. (a) (i) Suppose an individual has a utility function of the following form : $U(c_t) = \ln c_t$ for every time period t. If he discounts future utilities at a constant discount rate δ, show that his intertemporal optimizing behavior, using an intertemporal budget

constraint, leads to the result that the ratio of marginal utilities of consumption in each two adjacent periods over time is equal to the ratio of one plus the market interest rate to one plus the consumer discount rate.

(ii) Using the above result show and also explain under what conditions will consumption rise and fall over time. 4.5 +3

(b) (i) Derive the expression of the present value of income stream in Modigliani's life cycle hypothesis.

(ii) Discuss how, using these components, Modigliani derives a consumption function which is statistically measurable. From your answer explain how Modigliani solves the consumption puzzle ?

2.5 +3+2

(c) (i) Show using the adaptive expectations hypothesis, permanent consumption in period t is a function of permanent consumption in period t-1.

(ii) Explain how Robert Hall reformulated the consumption theory by incorporating the assumption of rational expectations. 3.5+4

(*a*) (*i*) मान लीजिए कि किसी व्यक्ति का उपभोग फलन प्रत्येक कालावधि हेतु $U(c_t) = \ln c_t$ है। यदि वह भविष्य की उपयोगिता पर स्थिर दर δ से बट्टा (discount) काटता है, तो दर्शाइए कि अन्तरअवधि (intertemporal) बजट प्रतिबन्ध के अधीन उसके अन्तरअवधि इष्टतमीकरण (optimization) व्यवहार के परिणामस्वरूप दो आसन्न (adjacent) अवधियों में उपभोग की सीमान्त उपयोगिताओं का अनुपात (1 + बाजार ब्याज दर) व (1 + उपभोक्ता की बट्टे (discount) की दर) के मध्य अनुपात के बराबर होगी।

(*ii*) उपर्युक्त परिणाम की सहायता से दर्शाइए व समझाइए कि किन स्थितियों में उपभोग समय के साथ बढ़ेगा व घटेगा।

(*b*) (*i*) मोडिग्लियानी की जीवन-चक्र परिकल्पना में आय-प्रवाह के वर्तमान मूल्य हेतु व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए।

(*ii*) मोडिग्लियानी इन घटकों की सहायता से किस प्रकार एक ऐसा उपभोग फलन व्युत्पन्न करते हैं जो कि सांख्यिकीय रूप से मापनीय है, इसका विवेचन कीजिए। अपने उत्तर से समझाइए कि मोडिग्लियानी किस प्रकार उपभोग पहेली को सुलझाते हैं।

(*c*) (*i*) अनुकूलनशील (adaptive) प्रत्याशा परिकल्पना की सहायता से दर्शाइए कि अवधि t में स्थायी उपभोग, अवधि $t-1$ में स्थायी उपभोग का फलन होता है।

(*ii*) समझाइए कि रॉबर्ट हॉल ने किस प्रकार तर्कसंगत (rational) प्रत्याशाओं को समाविष्ट करके उपभोग के सिद्धान्त का पुनर्सूत्रण किया।

3. (*a*) (*i*) At the end of 1988 and the beginning of 1989, the inventory sales ratio was beginning to rise in the US economy. Business cycle forecasters were worried about the possibility of a recession later in 1989. Explain why a high inventory sales ratio would be a recessionary signal. Is this relation always true ?

(*ii*) What is the q theory of investment ? 4+3.5

(*b*) Suppose we have a Cobb - Douglas production function given by $Y = L^{1-\gamma}K^{\gamma}$ $1 > \gamma > 0$, here Y = output, L = labour, K = capital γ = share of K in output.

(*i*) Derive the expression for the desired capital stock.

(*ii*) What will be the value of the desired K stock when $\gamma = 0.3$, Y = Rs 5 lakh and $rc = 0.12$. (rc = rental cost of capital)

(*iii*) What are the effects of fiscal and monetary policy on the desired capital stock ? 2.5+2+3

(*c*) (*i*) Tobin distinguished three kinds of preferences that an individual might have towards risk. What are they ? Explain their equilibrium portfolios with the help of diagrams.

(*ii*) Explain from the above analysis how the aggregate money demand can be derived in the portfolio balance model when an individual diversifies between bonds and money. 3 +4.5

(*a*) (*i*) 1988 के अन्त में व 1989 के प्रारम्भ में स्टॉक-बिक्री अनुपात (inventory sales ratio) US economy में बढ़ने लगा था। व्यापार-चक्रों के भविष्यवक्ता 1989 के अगले भाग में मंदी की सम्भावना को लेकर चिन्तित थे। समझाइए कि स्टॉक-बिक्री अनुपात मंदी का संकेत क्यों होगा। क्या यह सम्बन्ध हमेशा सत्य होता है ?

(*ii*) निवेश का q सिद्धान्त क्या है ?

(*b*) मान लीजिए कि हमारे पास $Y = L^{1-\gamma}K^{\gamma}$ द्वारा दिया गया एक कॉब-डगलस उत्पादन फलन है जहाँ $1 > \gamma > 0$, Y = उत्पाद, L = श्रम, K = पूँजी तथा γ = उत्पाद में K का अंश है।

(*i*) वांछित (desired) पूँजी स्टॉक हेतु व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए।

(*ii*) जब $\gamma = 0.3$, Y = 5 लाख रु. तथा $rc = 0.12$ हो तो वांछित K स्टॉक का मान क्या होगा ? (rc = rental cost of capital) पूँजी की किराया लागत।

(*iii*) राजकोषीय व मौद्रिक नीतियों के वांछित पूँजी स्टॉक

(*c*) (*i*) 'टोबिन ने जोखिम के प्रति किसी व्यक्ति के तीन प्रकार के सम्भव अधिमानों (preferences) के मध्य विभेद किया। वे क्या-क्या हैं ? इनके संगत साम्यावस्था वाली निवेश-सूचियों (portfolios) को आरेखों की सहायता से समझाइए।

(*ii*) उपर्युक्त विश्लेषण की सहायता से समझाइए कि जब व्यक्ति ऋण-पत्रों (bonds) व मुद्रा के मध्य विविधीकरण (diversification) करता है ऐसी स्थिति में निवेश-सूची सन्तुलन मॉडल (portfolio balance model) में समग्र मुद्रा मांग किस प्रकार व्युत्पन्न की जा सकती है।

4. (*a*) (*i*) 'A dramatic rethinking of monetary policy took place, based on inflation targeting rather than on money growth targeting'. What were the reasons for this ?

(*ii*) Explain, using the Taylor rule, how the economy adjusts when, first - inflation is above target and second-when unemployment is above the natural rate ? 4.5+3

(*b*) (*i*) Examine the view that debt financed govt. spending keeps economic activity unchanged. What are the limitations of this argument ?

(*ii*) 'The higher the ratio of debt to GDP, the larger the potential for catastrophic debt dynamics'. Explain. 4 +3.5

(c) (i) Distinguish between nominal price rigidity and real price rigidity in the context of the New Keynesian macroeconomic models.

(ii) Taking the case of a monopolistic firm, explain with a diagram how a firm's decision not to cut price, inspite of a fall in demand, due to menu costs can have adverse effect on the society. 3+4.5

(a) (i) 'मौद्रिक नीति का, स्फीति लक्ष्यांकन (inflation targeting) के स्थान पर मुद्रा की वृद्धि के लक्ष्यांकन (money growth targeting) पर आधारित एक आकस्मिक (dramatic) पुनर्विचार (rethinking) हुआ।' इसके पीछे क्या कारण थे ?

(ii) टेलर नियम की सहायता से समझाइए कि अर्थव्यवस्था किस प्रकार समायोजित होती है, जब, पहला, स्फीति अपने लक्ष्य से ऊपर हो तथा दूसरा, जब बेरोजगारी अपने प्राकृतिक स्तर से ऊपर हो ?

(b) (i) ऋण-पोषित (debt financed) सरकारी व्यय से आर्थिक गतिविधि का स्तर अपरिवर्तित रहता है, इस विचार का परीक्षण कीजिए। इस तर्क की क्या सीमाएँ हैं ?

(ii) 'ऋण-GDP अनुपात जितना अधिक होगा, प्रलयंकर (catastrophic) ऋण गतिकी (debt dynamics) की सम्भावना उतनी ही अधिक होगी। समझाइए।

(c) (i) नव-केन्जीय (New keynesian) समष्टि-अर्थशास्त्रीय मॉडलों के सन्दर्भ में मौद्रिक कीमत-दृढ़ता व वास्तविक कीमत-दृढ़ता के मध्य अन्तर स्पष्ट कीजिए।

(ii) एक एकाधिकारी फर्म के मामले को लेते हुए एक रेखाचित्र की सहायता से समझाइए कि मांग में गिरावट के बावजूद कीमत-पत्र लागतों के कारण कीमतें कम न करने का फर्म का निर्णय, समाज पर प्रतिकूल प्रभाव डाल सकता है।

5. (a) (i) Explain how asset price bubble affects the financial system and what measures should the central bank take to resolve the problem.

(ii) Discuss how collateral reduces the problem of asymmetric information. 5+2.5

(b) (i) Explain the process of determination of equilibrium in the housing market in the short run.

(ii) What are the factors that determine the position of the demand curve for housing in the short run ?

(iii) When will the long run equilibrium of the housing industry be reached in a non-growing economy ? 3 +3 +1.5

(c) (i) Explain with an example that an economy with a higher average inflation rate has more scope to use monetary policy to fight a recession.

(ii) Why wars typically bring about large budget deficits ? 4 +3.5

(*a*) (*i*) समझाइए कि परिसम्पत्ति-कीमत बुलबुले (asset price bubble) किस प्रकार वित्तीय तन्त्र को प्रभावित करते हैं तथा इस समस्या के निराकरण हेतु केन्द्रीय बैंक को क्या कदम उठाने चाहिए ?

(*ii*) अमानत (collateral) किस प्रकार असममित सूचना की समस्या को कम करती है, इसका विवेचन कीजिए।

(*b*) (*i*) आवासीय बाजार में लघुकाल में साम्यावस्था के निर्धारण की प्रक्रिया को समझाइए।

(*ii*) आवासन हेतु मांग वक्र की स्थिति को लघुकाल में कौन-कौनसे कारक निर्धारित करते हैं ?

(*iii*) एक ऐसी अर्थव्यवस्था, जिसमें वृद्धि नहीं हो रही है, में आवासन उद्योग में दीर्घकालीन साम्यावस्था कब प्राप्त होगी ?

(*c*) (*i*) एक उदाहरण की सहायता से समझाइए कि उच्चतर स्फीति दर वाली अर्थव्यवस्था में मन्दी से लड़ने हेतु मौद्रिक नीति के उपयोग की अधिक गुंजाइश है।

(*ii*) युद्ध आम तौर पर बड़े बजट घाटों को क्यों जन्म देते हैं ?

This question paper contains **16+8** printed pages
+11 Tables Attached]

10 2018

Roll No. | | | | | | | | | | | |

DESHBANDHU COLLEGE LIBRARY Kalkaji, New Delhi-19

S. No. of Question Paper : **4665**

Unique Paper Code : **12271403** **HC**

Name of the Paper : **Introductory Econometrics**

Name of the Course : **B.A. (Honours) Economics—CBCS**

Semester : **IV**

Duration : **3 Hours** Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

(इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।)

Note :— Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी :—इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी **या** हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

The question paper consists of *seven* questions.

Attempt any *five* questions.

Each question carries **15** marks.

Use of simple non-programmable calculator is allowed.

Statistical tables are attached for your reference.

प्रश्न-पत्र **सात** प्रश्नों का है।

किन्हीं **पाँच** सवालों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न **15** अंक वहन करता है।

सरल गैर-प्रोग्राम कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति दी जाती है।

आपके सन्दर्भ के लिए सांख्यिकी टेबल प्रश्नपत्र के अंत में दी गयी हैं।

P.T.O.

1. State whether the following statements are true or false. Give reasons for your answer :

(*i*) If the regression model : $Y_i = B_1 + B_2X_{2i} + B_3X_{3i} + u_i$, is estimated using the method of ordinary least squares, the sum of the estimated residuals (e_i) is zero.

(*ii*) For the two-variable regression model, $Y_t = B_1 + B_2X_t + u_t$, if the OLS residuals (e_t) are plotted against time (t) and a distinct pattern is observed, then it is an indication of heteroscedasticity.

(*iii*) If the p-value for a test statistic is greater than the chosen level of significance α, then we reject H_0 at α level of significance.

(*iv*) In the regression model $Y_i = B_1 + B_2X_i + u_i$, some variation in the values of the explanatory variable (X) is necessary for estimation of the regression coefficients.

(*v*) The model : $Y = B_1 + B_2X$, is a mathematical model but not an econometric model. 5×3=15

निम्नलिखित बयान सही हैं या गलत हैं। अपने जवाब के लिए कारण दीजिए :

(*i*) यदि प्रतिगमन मॉडल : $Y_i = B_1 + B_2X_{2i} + B_3X_{3i} + u_i$, का अनुमान ओ.एल.एस. विधि से निकाला गया है तो अनुमानित अवशिष्टों (e_i) का योग शून्य है।

(*ii*) दो-चर प्रतिगमन मॉडल: $Y_t = B_1 + B_2X_t + u_t$, के लिए अगर ओ.एल.एस. अवशिष्ट (e_t) को समय (t) के विरुद्ध प्लाट करने पर पैटर्न देखा जाता है, तो यह हेटरोसेडस्टिसिटी (Heteroscedasticity) का एक संकेत है।

(*iii*) यदि एक परीक्षण सांख्यिकी के लिए पी-मान चयनित स्तर के α से अधिक है, तो हम महत्व के α स्तर पर H_0 को अस्वीकार करते हैं।

(*iv*) प्रतिगमन मॉडल : $Y_i = B_1 + B_2X_i + u_i$, में स्पष्टीकरण चर (X) के मूल्यों में कुछ भिन्नता प्रतिगमन गुणांक के अनुमान के लिए आवश्यक है।

(*v*) मॉडल : $Y = B_1 + B_2X$, एक गणितीय मॉडल है, लेकिन एक अर्थमितीय मॉडल नहीं है।

2. (*a*) The following auxiliary regression results were obtained using OLS residuals (e_i) of the original regression model,

$Y_i = B_1 + B_2 X_{2i} + u_i$,

$e_i^2 = -25 + 19.57\ X_i - 10.54\ X_i^2$

$R^2 = 0.1423 \quad n = 80$

(*i*) Perform White's General Heteroscedasticity Test at 10% level of significance. State the null and alternative hypotheses clearly. Do you find evidence of heteroscedasticity ?

(*ii*) Are the OLS estimators still unbiased and best in the presence of heteroscedasticity ? 5

(*b*) The hypothesis $H_0 : \mu = 75$ is tested against the alternative hypothesis $H_1 : \mu < 75$ using a random sample of size 25 from a normally distributed population with $\sigma = 9$ using a 1% level of significance :

(*i*) Calculate the probability of Type II error if the true $\mu = 72$.

(*ii*) Will the probability of Type II error be larger if a 10% level of significance is used, instead ? 5

(*c*) Discuss any *five* consequences of multicollinearity. 5

(क) मूल प्रतिगमन मॉडल : $Y_i = B_1 + B_2 X_{2i} + u_i$, के ओ.एल.एस. अवशिष्ट ($e_i$) का उपयोग करते हुए निम्नलिखित सहायक प्रतिगमन परिणाम प्राप्त किए गए :

$e_i^2 = -25 + 19.57\ X_i - 10.54\ X_i^2$

$R^2 = 0.1423 \quad n = 80$

(*i*) 10% स्तर के महत्व पर व्हाइट का जनरल हेटरोसेडस्टिसिटी (Heteroscedasticity) टेस्ट कीजिए। अशक्त (null) और वैकल्पिक अनुमानों को स्पष्ट रूप से बताइए। क्या आपको हेटरोसेडस्टिसिटी का प्रमाण मिलता है ?

(*ii*) क्या ओ.एल.एस. आकलनकर्ता हेटरोसेडस्टिसिटी की उपस्थिति में भी निष्पक्ष और सबसे अच्छे हैं?

(ख) परिकल्पना $H_0 : \mu = 75$ वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 : \mu < 75$ के खिलाफ सामान्यत: वितरित जनसंख्या ($\sigma = 9$) से एक यादृच्छिक नमूने (आकार 25) का उपयोग कर 1% महत्व के स्तर का परीक्षण किया जाना है।

(*i*) टाइप II त्रुटि की संभावना की गणना कीजिए यदि सही $\mu = 72$ है।

(ii) क्या टाइप II त्रुटि की संभावना बड़ी हो सकती है यदि इसकी जगह 10% महत्व का स्तर उपयोग किया जाता है ?

(ग) मल्टीकॉलिनेरिटी (Multicollinearity) के किन्हीं **पाँच** परिणामों पर चर्चा कीजिए।

3. (a) Suppose that the regression model $Y_i = B_1 + B_2X_i + u_i$, is estimated using the least squares method as $\hat{Y}_i = b_1 + b_2X_i$. If Y is related to Z through the equation, $Z_i = 5 + 2Y_i$ and another regression model $Z_i = A_1 + A_2X_i + v_i$ is estimated using the method of least squares as $\hat{Z}_i = a_1 + a_2X_i$.

(i) Are the slope coefficients of the two estimated regression equations the same, *i.e.*, is $a_2 = b_2$?

(ii) How will the t statistic of a_2 be related to the t statistic of b_2 ? 5

(b) What do you understand by the term autocorrelation ? If the coefficient of autocorrelation, ρ, is not known, how can it be estimated from each of the following ?

(i) Durbin-Watson d-statistic

(ii) OLS residuals. 5

(c) The following regression model was estimated using data collected from 34 stores, 5

$\hat{Y}_i = 5837.53 - 53.217\ X_{2i} + 3.613X_{3i}$

se = (628.151) (6.853) (0.6852)

RSS = 19472.33 TSS = 52093.55

Y_i = monthly sales of 'Milky' chocolate bars for store i, (number of bars)

X_{2i} = price of 'Milky' chocolate bars for store i, (in rupees)

X_{3i} = monthly 'in-store' promotional expenditure for store i, (in thousand rupees)

(i) Interpret the estimated partial slope coefficients of X_2 and X_3.

(ii) Test the model for overall goodness of fit using 5% level of significance. 5

(क) मान लीजिए कि प्रतिगमन मॉडल $Y_i = B_1 + B_2X_i + u_i$, का अनुमान ओ.एल.एस. विधि का उपयोग कर लगाया गया है जो कि यह है $\hat{Y}_i = b_1 + b_2X_i$ । मान लीजिए कि Y समीकरण $Z_i = 5 + 2Y_i$ के माध्यम से Z से संबंधित है और एक अन्य प्रतिगमन मॉडल $Z_i = A_1 + A_2X_i + v_i$ का अनुमान ओ.एल.एस. विधि द्वारा लगाया गया जो यह है $\hat{Z}_i = a_1 + a_2X_i$ ।

(*i*) क्या दो अनुमानित प्रतिगमन समीकरणों के ढलान गुणांक समान हैं, यानी $a_2 = b_2$?

(*ii*) a_2 का टी आँकड़ा किस प्रकार b_2 के टी आँकड़ा से संबंधित होगा ?

(ख) आप स्वत:सह-संबंध (Autocorrelation) से क्या समझते हैं ? यदि स्वत:सह-संबंध (Autocorrelation) का गुणांक, ρ, ज्ञात नहीं है तो निम्न में से प्रत्येक से इसका अनुमान कैसे लगाया जा सकता है ?

(*i*) डर्बिन-वॉटसन डी-आँकड़े

(*ii*) ओ.एल.एस. अवशिष्ट।

(ग) 34 भंडारों से एकत्र किए गए डेटा का उपयोग करते हुए निम्नलिखित प्रतिगमन मॉडल का अनुमान लगाया गया है :

$$\hat{Y}_i = 5837.53 - 53.217\ X_{2i} + 3.613X_{3i}$$

मानक त्रुटि = (628.151) (6.853) (0.6852)

आर.एस.एस. = 19472.33 टी.एस.एस. = 52093.55

Y_i = स्टोर$_i$ के लिए 'Milky' चॉकलेट बार की मासिक बिक्री (बार की संख्या)

X_{2i} = स्टोर$_i$ के लिए 'Milky' चॉकलेट बार की कीमत (रुपए में)

X_{3i} = स्टोर$_i$ के लिए मासिक 'इन-स्टोर' प्रचार व्यय (हजार रुपए में)

(*i*) X_2 और X_3 के अनुमानित आंशिक ढलान गुणांकों की व्याख्या कीजिए।

(*ii*) 5% स्तर के महत्व का उपयोग करके फिट की संपूर्णता के लिए मॉडल का परीक्षण कीजिए।

4. (*a*) Consider the following regression results for 45 countries for the year 2011-2012, (the *t*-ratios are given in brackets) :

$$\widehat{FDI}_i = 21.045 + 0.0545\ GDP_i + 1.864\ GOV_INDEX_i$$

t = (1.232) (0.744) (1.005) $R^2 = 0.9667$

where

FDI = Foreign Direct Investment (billion dollars)

GDP = Gross Domestic Product (billion dollars)

GOV_INDEX = Governance Index (a higher value indicates better governance)

(*i*) Is there evidence of multicollinearity ? Explain your answer.

(*ii*) Discuss any *two* methods that can be used to deal with the issue of multicollinearity. 5

(*b*) The following regression was estimated using data from a sample of 15 houses (standard errors are given in brackets) :

$$\hat{Y}_i = 200.091 + 16.186\ X_i + 3.853 D_i$$

se = (4.354) (2.578) (1.241)

Y_i = assessed value of a house (in Rs. lakhs)

X_i = size of the house (in hundreds of square feet)

D_i = 0 for house *i*, if it does not face a park

= 1 for house i, if it faces a park

(*i*) Interpret the estimated coefficient of D_i.

(*ii*) Test whether the presence of a park in front of the house increases the assessed value of the house, using the *p*-value approach and a 5% level of significance. 5

(*c*) A researcher postulates that the car density (number of cars per thousand population), Y, in a city depends on the bus density (number of buses per thousand population), X. He runs the regression model, $Y_i = B_1 + B_2 X_i + u_i$ for a cross-section of 128 cities in India and finds evidence of heteroscedasticity.

(*i*) How would the model be re-estimated if it is assumed that error variance is proportional to the reciprocal of X_i, that is, $E(u_i^2) = \frac{\sigma^2}{X_i}$? Show that the transformed error term is homoscedastic.

(*ii*) Can we compare R^2 of the original model and the transformed model ? Explain your answer. 5

(क) वर्ष 2011-2012 के 45 देशों के लिए निम्नलिखित प्रतिगमन परिणामों पर विचार कीजिए, (*t* अनुपात कोष्ठकों में दिए गए हैं) :

$$\widehat{FDI}_i = 21.045 + 0.0545\ GDP_i + 1.864\ GOV_INDEX_i$$

$t =$ (1.232) (0.744) (1.005) $R^2 = 0.9667$

जहाँ, एफ.डी.आई. = विदेशी प्रत्यक्ष निवेश (अरब डॉलर)

जी.डी.पी = सकल घरेलू उत्पाद (अरब डॉलर)

GOV_INDEX = प्रशासन सूचकांक (उच्च मान सुशासन को दर्शाता है)

(*i*) क्या बहुसमरैखिकता (Multicollinearity) का प्रमाण है ? अपना जवाब समझाइए।

(*ii*) किन्हीं **दो** विधियों पर चर्चा कीजिए जिनका उपयोग बहुसमरैखिकता (Multicollinearity) के मुद्दे से निपटने के लिए किया जा सकता है।

(ख) 15 घरों के नमूने से डेटा का उपयोग करते हुए निम्नलिखित अपगमन का अनुमान लगाया गया :

$$\hat{Y}_i = 200.091 + 16.186\ X_i + 3.853 D_i$$

मानक त्रुटि = (4.354) (2.578) (1.241)

Y_i = एक घर का अंकित मूल्य (लाख रुपये में)

X_i = घर का आकार (सैकड़ों वर्ग फुट में)

D_i = 0 यदि घर पार्क के सामने नहीं है

= 1 यदि घर पार्क के सामने है।

(*i*) D_i के अनुमानित गुणांक की व्याख्या कीजिए।

(*ii*) पी-मान (*p*-वैल्यू) दृष्टिकोण और 5% महत्व का उपयोग करते हुए जाँच कीजिए कि क्या घर के सामने एक पार्क की उपस्थिति घर के मूल्य को बढ़ाती है ?

(ग) एक शोधकर्ता बताता है कि शहर में कार घनत्व (कारों की संख्या प्रति हजार आबादी), Y, बस घनत्व X पर निर्भर करता है (हजारों प्रति बसों की संख्या)।

वह भारत में व्यापक प्रतिनिधित्व के 128 शहरों का प्रतिगमन मॉडल : $Y_i = B_1 + B_2X_i + u_i$ अनुमानित करता और हेटरोसेडस्टिसिटी (Heteroscedasticity) का प्रमाण पाता है।

(*i*) मॉडल को फिर से अनुमानित कैसे किया जायेगा यदि यह माना जाये कि त्रुटि विचरण X_i के व्युत्क्रम से आनुपातिक सम्बन्ध रखता है, अर्थात् $E(u_i^2) = \frac{\sigma^2}{X_i}$? दिखाइए कि रूपांतरित त्रुटि पर होमोसेडस्टिक है।

(*ii*) क्या हम मूल मॉडल और रूपांतरण मॉडल के R^2 की तुलना कर सकते हैं ? अपना जवाब समझाइये।

5. (*a*) Using annual time-series data for the company 'Pure Juice' for the period 2000-2016, the following equation was obtained :

$$\widehat{lnY}_t = 1.2028 + 0.0214\ t$$

$$se = (0.0233)\ (0.0025)$$

where Y_t = revenue of the company in Rs. crores at time t and *ln* indicates natural log.

(*i*) Interpret the estimated coefficients.

(*ii*) Explain how the annual compound growth rate in revenues of the company during the period can be obtained ?

(*iii*) Using the estimated model, how can the forecast revenue for the year 2017 be obtained ? 5

(*b*) (*i*) In the presence of autocorrelation, the OLS estimators obtained are Best Linear Unbiased Estimators (BLUE). Do you agree with the statement ? Why or why not ?

(*ii*) In the two variable regression model, $Y_t = B_1 + B_2X_t + u_t$, discuss how the problem of autocorrelation can be remedied using First Difference Method ($\rho = 1$) if the disturbance term u_t follows AR(1) scheme, that is, $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$. 5

(c) Consider the following three-variable regression model :

$$Y_i = B_1 + B_2X_{2i} + B_3X_{3i} + u_i$$

If the method of ordinary least squares is used to estimate the parameters, prove that :

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma y_i^2 - b_2\Sigma y_i x_{2i} - b_3\Sigma y_i x_{3i}$$

where $y_i = (Y_i - \bar{Y}), x_{2i} = (X_{2i} - \bar{X}_2), x_{3i} = (X_{3i} - \bar{X}_3)$. 5

(क) 'Pure Juice' कंपनी का 2000-2016 की अवधि के लिए वार्षिक समय-शृंखला डेटा का उपयोग करते हुए निम्नलिखित समीकरण प्राप्त किया गया :

$$\widehat{lnY}_t = 1.2028 + 0.0214\ t$$

$$se = (0.0233)\ (0.0025)$$

जहाँ, $Y_t = t$ समय पर कंपनी का राजस्व (रुपए करोड़ में) और *ln* प्राकृतिक लॉग इंगित करता है।

(*i*) अनुमानित गुणांकों की व्याख्या कीजिए।

(*ii*) समझाइए कि इस अवधि के दौरान कंपनी के राजस्व में वार्षिक यौगिक विकास दर कैसे प्राप्त की जा सकती है ?

(*iii*) अनुमानित मॉडल का उपयोग, वर्ष 2017 के लिए राजस्व का पूर्वानुमान कैसे प्राप्त किया जा सकता है ?

(ख) (*i*) स्वत:सह-संबंध (Autocorrelation) की उपस्थिति में प्राप्त ओ.एल.एस. अनुमानक सर्वश्रेष्ठ रैखिक निष्पक्ष (BLUE) हैं। क्या आप इस बयान से सहमत हैं ? क्यों या क्यों नहीं ?

(*ii*) दो चर प्रतिगमन मॉडल $Y_t = B_1 + B_2X_t + u_t$, में चर्चा कीजिए कि स्वत:सह-संबंध (Autocorrelation) की समस्या को पहला अंतर पद्धति ($\rho = 1$) का उपयोग करके कैसे दूर किया जा सकता है, अगर त्रुटि पर u_t ऑटोरेग्रेसिव (1) योजना का पालन करती है, अर्थात् $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$.

(ग) निम्न तीन चर प्रतिगमन मॉडल पर विचार कीजिए :

$$Y_i = B_1 + B_2X_{2i} + B_3X_{3i} + u_i$$

यदि ओ.एल.एस. विधि का उपयोग पैरामीटर का अनुमान लगाने के लिए किया जाता है, तो यह साबित कीजिए कि :

$$\Sigma e_i^2 = \Sigma y_i^2 - b_2\Sigma y_i x_{2i} - b_3\Sigma y_i x_{3i}$$

जहाँ, $y_i = (Y_i - \bar{Y}), x_{2i} = (X_{2i} - \bar{X}_2), x_{3i} = (X_{3i} - \bar{X}_3)$

6. (*a*) It is known that the variance of scores of all high school students in a science test is 150. A sample of scores of 20 high school students who took the science test this year yielded a variance of 170. Test, at 5% level of significance, if the variance of scores of the high school students who took the science test this year is different from 150. State the underlying assumptions, if any. 5

(*b*) Consider the three-variable model, $Y_i = B_1 + B_2X_{2i} + B_3X_{3i} + B_4X_{4i} + u_i$. Let b_2 be the OLS estimator of the slope coefficient B_2.

(*i*) Derive variance of b_2, i.e. var(b_2), in terms of Variance Inflation Factor (VIF).

(*ii*) When X_2 is regressed on X_3 and X_4, R_2^2 obtained from this auxiliary regression is 0.9217. Does it necessarily imply high variance of b_2? Explain. 5

(*c*) Based on a sample of size 20, the following regression line was estimated using the least-squares method,

$$\hat{Y}_i = 5 + 3X_i$$

In addition, $\bar{X} = 2\Sigma(X_i - \bar{X})^2 = 20$ and the standard error of regression was estimated to be equal to 1.

Construct a 95% confidence interval estimate of the true population mean of Y for $X_0 = 15$. Do you expect the confidence interval to be wider if a similar interval is estimated for $X_0 = 2$? Explain your answer. 5

(क) यह ज्ञात है कि साइंस टेस्ट में सभी हाईस्कूल के छात्रों के अंकों का विचलन (Variance) 150 है। 20 उच्च विद्यालय के छात्रों के स्कोर का एक नमूना जो इस साल विज्ञान की परीक्षा ले रहे थे, 170 का एक विचलन देता है। 5% स्तर के महत्व पर टेस्ट कीजिए यदि हाईस्कूल के छात्रों के स्कोर का विचलन, जो इस वर्ष की साइंस की परीक्षा ले रहे थे, 150 से अलग है।

(ख) तीन चर मॉडल पर विचार कीजिए, $Y_i = B_1 + B_2X_{2i} + B_3X_{3i} + B_4X_{4i} + u_i$ । माना कि b_2, B_2 के गुणांक का ओ.एल.एस. अनुमान है।

(*i*) b_2, के विचलन अर्थात var(b_2), को Variance Inflation Factor (VIF) के अनुसार प्राप्त कीजिए।

(*ii*) जब X_2 को X_3 और X_4 पर प्रतिगामित किया जाता है तो इस सहायक प्रतिगमन से प्राप्त R_2^2 0.9217. है। क्या यह आवश्यक रूप से (b_2) में उच्च विचलन को इंगित करता है ? समझाइए।

(ग) आकार 20 के एक नमूने के आधार पर, निम्न प्रतिगमन रेखा का अनुमान ओ.एल.एस. विधि से लगाया गया

$$\hat{Y}_i = 5 + 3X_i$$

इसके साथ-साथ, $\bar{X} = 2\Sigma(X_i - \bar{X})^2 = 20$, और प्रतिगमन की मानक त्रुटि 1 के बराबर अनुमानित की गयी। Y की आबादी के सच्चे औसत के 95% विश्वास अंतराल का निर्माण कीजिए जबकि $X_0 = 15$ है। क्या आप विश्वास अंतराल को ज्यादा बड़ा होने की उम्मीद करते हैं यदि यही अंतराल $X_0 = 2$ के लिए अनुमानित किया जाए ? अपना जवाब समझाइए।

7. (*a*) The following two regression models were estimated using annual time-series data for the period 1990-2012 for a certain country (standard errors are mentioned in the parentheses) :

Model A : $\widehat{lnY}_t = 2.18 + 0.34\, lnX_{2t} - 0.51\, lnX_{3t} + 0.15\, lnX_{4t} + 0.09\, lnX_{5t}$

se = (0.156) (0.083) (0.110) (0.099) (0.101)

$R^2 = 0.9823$

Model B : $\widehat{lnY}_t = 2.03 + 0.45\, lnX_{2t} - 0.377\, lnX_{3t}$

se = (0.116) (0.025) (0.063)

$R^2 = 0.9801$

where Y_t = demand for cheese (in kg)

X_2 = disposable income (in Rs.'000)

X_3 = price of cheese (in Rs. per kg)

X_4 = price of butter (in Rs. per kg)

X_5 = price of peanut-butter (in Rs. per kg)

Which model would you choose ? Test the relevant hypotheses at the 5% level of significance and state your conclusion clearly. 5

(*b*) For the regression model : $Y_i = B_2X_i + u_i$, derive the OLS estimator of B_2. Show that it is an unbiased estimator. Clearly, state the assumptions required to prove its unbiasedness. 5

(*c*) A researcher estimated the demand function for money for an economy for 101 quarters using quarterly data for the period Q1 : 1986-1987 to Q2 : 2011-2012. The regression results are as follows (standard errors are

mentioned in the brackets and *ln* indicates natural log):

$\widehat{lnM}_t = 2.6027 - 0.4024\ lnR_t + 0.59\ lnY_t + 0.524\ lnM_{t-1}$

se = (1.24) (0.36) (0.34) (0.02)

$R^2 = 0.9165$ Durbin-Watson *d*-statistic = 0.650

M_t = real cash balances

R_t = long-term interest rate

Y_t = aggregate real national income

(*i*) Use Durbin's *h*-test to check for the presence of first order autocorrelation at 1% level of significance.

(*ii*) Can we use Durbin-Watson *d*-statistic test for the above regression ? Give reasons. 5

(क) किसी देश के लिए 1990-2012 की अवधि के लिए वार्षिक समय-शृंखला डेटा का उपयोग करते हुए निम्नलिखित दो प्रतिगमन मॉडल का अनुमान लगाया गया :

मॉडल A : $\widehat{lnY}_t = 2.18 + 0.34\ lnX_{2t} - 0.51\ lnX_{3t} + 0.15\ lnX_{4t} + 0.09\ lnX_{5t}$

se = (0.156) (0.083) (0.110) (0.099) (0.101)

$R^2 = 0.9823$

मॉडल B : $\widehat{lnY}_t = 2.03 + 0.45\ lnX_{2t} - 0.377\ lnX_{3t}$

se = (0.116) (0.025) (0.063)

$R^2 = 0.9801$

जहाँ, Y_t = पनीर की माँग (किग्रा में)

X_2 = डिस्पोजेबल आय (रु. '000 में)

X_3 = पनीर की कीमत (रुपये प्रति किलो में)

X_4 = मक्खन की कीमत (रुपये प्रति किलो में)

X_5 = मूँगफली-मक्खन की कीमत (रुपये प्रति किलो में)

आप किस मॉडल का चयन करेंगे ? 5% महत्व के स्तर पर प्रासंगिक अनुमानों का परीक्षण कीजिए और अपने निष्कर्ष को स्पष्ट रूप से बताइए।

(ख) प्रतिगमन मॉडल : $Y_i = B_2X_i + u_i$, के लिए B_2 का ओ.एल.एस. अनुमानक प्राप्त कीजिए। दिखाइये कि यह एक निष्पक्ष अनुमानक है। इसकी निष्पक्षता साबित करने के लिए अपेक्षित मान्यताओं को बताइए।

(ग) एक शोधकर्ता ने अवधि Q1 : 1986-1987 से Q2 : 2011-2012. के लिए त्रैमासिक आँकड़ों के उपयोग से 101 क्वार्टर के लिए एक अर्थव्यवस्था के लिए धन के मांग फलन का अनुमान लगाया। प्रतिगमन के परिणाम निम्नानुसार हैं (मानक त्रुटियाँ ब्रैकेट में उल्लिखित हैं और *ln* प्राकृतिक लॉग इंगित करती हैं) :

$$\widehat{lnM}_t = 2.6027 - 0.4024\ lnR_t + 0.59\ lnY_t + 0.524\ lnM_{t-1}$$

$$se \quad = (1.24) \qquad (0.36) \qquad (0.34) \qquad (0.02)$$

$R^2 = 0.9165$ डर्बिन-वाटसन डी-आंकडा = 0.650

M_t = असली नकद शेष

R_t = दीर्घकालिक ब्याज दर

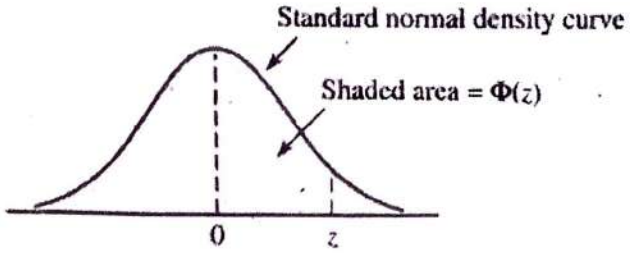
Y_t = सकल वास्तविक राष्ट्रीय आय

(*i*) 1% स्तर के महत्व पर पहले ऑर्डर ऑटोकोरेलेशन की उपस्थिति की जाँच के लिए डर्बिन *h* परीक्षण का उपयोग कीजिए।

(*ii*) क्या हम उपर्युक्त प्रतिगमन के लिए डर्बिन-वाटसन डी-स्टैटिस्टिक टेस्ट का उपयोग कर सकते हैं? कारण दीजिए।

Table A.3 Standard Normal Curve Areas

$\Phi(z) = P(Z \leq z)$



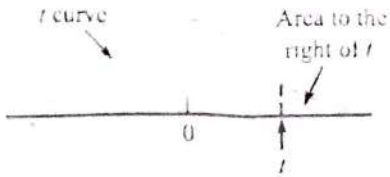
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3482
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

(continued)

Table A.3 Standard Normal Curve Areas (*cont.*) $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

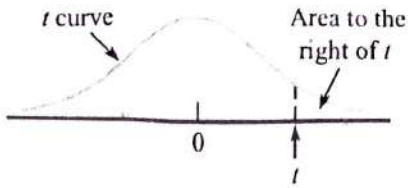
Table A.8 t Curve Tail Areas



t \ ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0.0	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1	.468	.465	.463	.463	.462	.462	.462	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461
0.2	.437	.430	.427	.426	.425	.424	.424	.423	.423	.423	.423	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422
0.3	.407	.396	.392	.390	.388	.387	.386	.386	.386	.385	.385	.385	.384	.384	.384	.384	.384	.384
0.4	.379	.364	.358	.355	.353	.352	.351	.350	.349	.349	.348	.348	.348	.347	.347	.347	.347	.347
0.5	.352	.333	.326	.322	.319	.317	.316	.315	.315	.314	.313	.313	.313	.312	.312	.312	.312	.312
0.6	.328	.305	.295	.290	.287	.285	.284	.283	.282	.281	.280	.280	.279	.279	.279	.278	.278	.278
0.7	.306	.278	.267	.261	.258	.255	.253	.252	.251	.250	.249	.249	.248	.247	.247	.247	.247	.246
0.8	.285	.254	.241	.234	.230	.227	.225	.223	.222	.221	.220	.220	.219	.218	.218	.218	.217	.217
0.9	.267	.232	.217	.210	.205	.201	.199	.197	.196	.195	.194	.193	.192	.191	.191	.191	.190	.190
1.0	.250	.211	.196	.187	.182	.178	.175	.173	.172	.170	.169	.169	.168	.167	.167	.166	.166	.165
1.1	.235	.193	.176	.167	.162	.157	.154	.152	.150	.149	.147	.146	.146	.144	.144	.144	.143	.143
1.2	.221	.177	.158	.148	.142	.138	.135	.132	.130	.129	.128	.127	.126	.124	.124	.124	.123	.123
1.3	.209	.162	.142	.132	.125	.121	.117	.115	.113	.111	.110	.109	.108	.107	.107	.106	.105	.105
1.4	.197	.148	.128	.117	.110	.106	.102	.100	.098	.096	.095	.093	.092	.091	.091	.090	.090	.089
1.5	.187	.136	.115	.104	.097	.092	.089	.086	.084	.082	.081	.080	.079	.077	.077	.077	.076	.075
1.6	.178	.125	.104	.092	.085	.080	.077	.074	.072	.070	.069	.068	.067	.065	.065	.065	.064	.064
1.7	.169	.116	.094	.082	.075	.070	.065	.064	.062	.060	.059	.057	.056	.055	.055	.054	.054	.053
1.8	.161	.107	.085	.073	.066	.061	.057	.055	.053	.051	.050	.049	.048	.046	.046	.045	.045	.044
1.9	.154	.099	.077	.065	.058	.053	.050	.047	.045	.043	.042	.041	.040	.038	.038	.038	.037	.037
2.0	.148	.092	.070	.058	.051	.046	.043	.040	.038	.037	.035	.034	.033	.032	.032	.031	.031	.030
2.1	.141	.085	.063	.052	.045	.040	.037	.034	.033	.031	.030	.029	.028	.027	.027	.026	.025	.025
2.2	.136	.079	.058	.046	.040	.035	.032	.029	.028	.026	.025	.024	.023	.022	.022	.021	.021	.021
2.3	.131	.074	.052	.041	.035	.031	.027	.025	.023	.022	.021	.020	.019	.018	.018	.018	.017	.017
2.4	.126	.069	.048	.037	.031	.027	.024	.022	.020	.019	.018	.017	.016	.015	.015	.014	.014	.014
2.5	.121	.065	.044	.033	.027	.023	.020	.018	.017	.016	.015	.014	.013	.012	.012	.012	.011	.011
2.6	.117	.061	.040	.030	.024	.020	.018	.016	.014	.013	.012	.012	.011	.010	.010	.010	.009	.009
2.7	.113	.057	.037	.027	.021	.018	.015	.014	.012	.011	.010	.010	.009	.008	.008	.008	.008	.007
2.8	.109	.054	.034	.024	.019	.016	.013	.012	.010	.009	.009	.008	.008	.007	.007	.006	.006	.006
2.9	.106	.051	.031	.022	.017	.014	.011	.010	.009	.008	.007	.007	.006	.005	.005	.005	.005	.005
3.0	.102	.048	.029	.020	.015	.012	.010	.009	.007	.007	.006	.006	.005	.004	.004	.004	.004	.004
3.1	.099	.045	.027	.018	.013	.011	.009	.007	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
3.2	.096	.043	.025	.016	.012	.009	.008	.006	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.002
3.3	.094	.040	.023	.015	.011	.008	.007	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002
3.4	.091	.038	.021	.014	.010	.007	.006	.005	.004	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002
3.5	.089	.036	.020	.012	.009	.006	.005	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.6	.086	.035	.018	.011	.008	.006	.004	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.7	.084	.033	.017	.010	.007	.005	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.8	.082	.031	.016	.010	.006	.004	.003	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.9	.080	.030	.015	.009	.006	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
4.0	.078	.029	.014	.008	.005	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000

(*continued*)

Table A.8 t Curve Tail Areas *(cont.)*



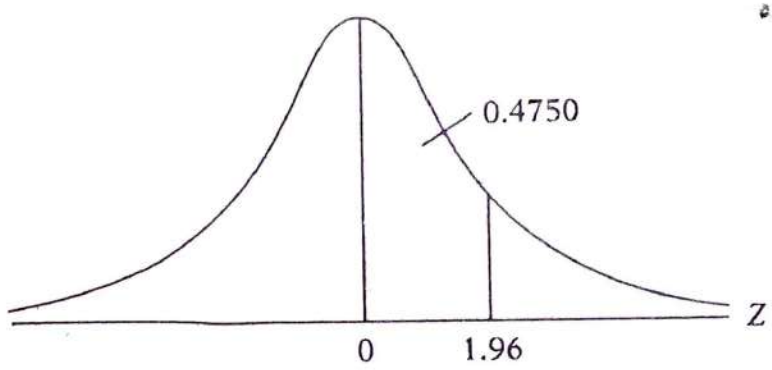
t \ ν	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	40	60	120	$\infty (= z)$
0.0	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.460	.460	.460	.460	.460
0.2	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421
0.3	.384	.384	.384	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.382	.382
0.4	.347	.347	.347	.347	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.345	.345	.345
0.5	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.310	.310	.310	.310	.310	.309	.309	.309
0.6	.278	.278	.278	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.276	.276	.275	.275	.274
0.7	.246	.246	.246	.246	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.244	.244	.243	.243	.242
0.8	.217	.217	.216	.216	.216	.216	.216	.215	.215	.215	.215	.215	.215	.214	.213	.213	.212
0.9	.190	.189	.189	.189	.189	.189	.188	.188	.188	.188	.188	.188	.187	.187	.186	.185	.184
1.0	.165	.165	.164	.164	.164	.164	.163	.163	.163	.163	.163	.163	.162	.162	.161	.160	.159
1.1	.143	.142	.142	.142	.141	.141	.141	.141	.141	.140	.140	.140	.139	.139	.138	.137	.136
1.2	.122	.122	.122	.121	.121	.121	.121	.120	.120	.120	.120	.120	.119	.119	.117	.116	.115
1.3	.105	.104	.104	.104	.103	.103	.103	.103	.102	.102	.102	.102	.101	.101	.099	.098	.097
1.4	.089	.089	.088	.088	.087	.087	.087	.087	.086	.086	.086	.086	.085	.085	.083	.082	.081
1.5	.075	.075	.074	.074	.074	.073	.073	.073	.073	.072	.072	.072	.071	.071	.069	.068	.067
1.6	.063	.063	.062	.062	.062	.061	.061	.061	.061	.060	.060	.060	.059	.059	.057	.056	.055
1.7	.053	.052	.052	.052	.051	.051	.051	.051	.050	.050	.050	.050	.049	.048	.047	.046	.045
1.8	.044	.043	.043	.043	.042	.042	.042	.042	.042	.041	.041	.041	.040	.040	.038	.037	.036
1.9	.036	.036	.036	.035	.035	.035	.035	.034	.034	.034	.034	.034	.033	.032	.031	.030	.029
2.0	.030	.030	.029	.029	.029	.028	.028	.028	.028	.028	.027	.027	.027	.026	.025	.024	.023
2.1	.025	.024	.024	.024	.023	.023	.023	.023	.023	.022	.022	.022	.022	.021	.020	.019	.018
2.2	.020	.020	.020	.019	.019	.019	.019	.018	.018	.018	.018	.018	.017	.017	.016	.015	.014
2.3	.016	.016	.016	.016	.015	.015	.015	.015	.015	.015	.014	.014	.014	.013	.012	.012	.011
2.4	.013	.013	.013	.013	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.011	.011	.011	.010	.009	.008
2.5	.011	.011	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.009	.009	.009	.009	.009	.008	.008	.007	.006
2.6	.009	.009	.008	.008	.008	.008	.008	.008	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.006	.005	.005
2.7	.007	.007	.007	.007	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.003
2.8	.006	.006	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
2.9	.005	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.002	.002
3.0	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.001
3.1	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.2	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.3	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000
3.4	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000
3.5	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000
3.6	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000
3.7	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.8	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.9	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4.0	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

AREAS UNDER THE STANDARDIZED NORMAL DISTRIBUTION

Example

$\Pr(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.4750$

$\Pr(Z \geq 1.96) = 0.5 - 0.4750 = 0.025$



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4454	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

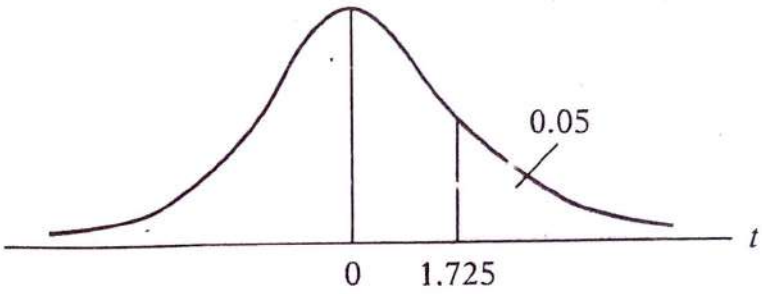
PERCENTAGE POINTS OF THE t DISTRIBUTION

Example

$\Pr(t > 2.086) = 0.025$

$\Pr(t > 1.725) = 0.05$ for df = 20

$\Pr(|t| > 1.725) = 0.10$

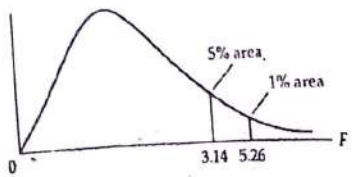


df \ Pr	0.25 0.50	0.10 0.20	0.05 0.10	0.025 0.05	0.01 0.02	0.005 0.010	0.001 0.002
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

UPPER PERCENTAGE POINTS OF THE F DISTRIBUTION

Example

$\Pr(F > 1.59) = 0.25$
$\Pr(F > 2.42) = 0.10$ for d.f. $N_1 = 10$
$\Pr(F > 3.14) = 0.05$ and $N_2 = 9$
$\Pr(F > 5.26) = 0.01$



d.f. for denominator N_2	Pr	d.f. for numerator N_1: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Pr	d.f. for denominator N_2
	.25	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.36	9.41	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.74	9.76	9.78	9.80	9.82	9.84	9.85	.25	
	.10	39.90	49.50	53.60	55.80	57.20	58.20	58.90	59.40	59.90	60.20	60.50	60.70	61.20	61.70	62.00	62.30	62.50	62.70	62.80	63.00	63.10	63.20	63.30	63.30	.10	1
1	.05	161.00	200.00	216.00	225.00	230.00	234.00	237.00	239.00	241.00	242.00	243.00	244.00	246.00	248.00	249.00	250.00	251.00	252.00	252.00	253.00	253.00	254.00	254.00	254.00	.05	
	.25	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.39	3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.45	3.46	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48	.25	
	.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.40	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.48	9.49	9.49	9.49	.10	2
2	.05	18.50	19.00	19.20	19.20	19.30	19.30	19.40	19.40	19.40	19.40	19.40	19.40	19.40	19.40	19.50	19.50	19.50	19.50	19.50	19.50	19.50	19.50	19.50	19.50	.05	
	.01	98.50	99.00	99.20	99.20	99.30	99.30	99.40	99.40	99.40	99.40	99.40	99.40	99.40	99.40	99.50	99.50	99.50	99.50	99.50	99.50	99.50	99.50	99.50	99.50	.01	
	.25	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.45	2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	.25	
	.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.15	5.14	5.14	5.14	5.14	5.13	.10	3
3	.05	10.10	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.55	8.54	8.53	8.53	.05	
	.01	34.10	30.80	29.50	28.70	28.20	27.90	27.70	27.50	27.30	27.20	27.10	27.10	26.90	26.70	26.60	26.50	26.40	26.40	26.30	26.20	26.20	26.20	26.10	26.10	.01	
	.25	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	.25	
	.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.91	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.78	3.77	3.76	3.76	.10	4
4	.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.66	5.65	5.64	5.63	.05	
	.01	21.20	18.00	16.70	16.00	15.50	15.20	15.00	14.80	14.70	14.50	14.40	14.40	14.20	14.00	13.90	13.80	13.70	13.70	13.70	13.60	13.60	13.50	13.50	13.50	.01	
	.25	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87	1.87	1.87	1.87	.25	
	.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.13	3.12	3.12	3.11	3.10	.10	5
5	.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.71	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.40	4.39	4.37	4.36	.05	
	.01	16.30	13.30	12.10	11.40	11.00	10.70	10.50	10.30	10.20	10.10	9.96	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.20	9.13	9.11	9.08	9.04	9.02	.01	
	.25	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	.25	
	.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.77	2.76	2.75	2.74	2.73	2.73	2.72	.10	6
6	.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.71	3.70	3.69	3.68	3.67	.05	
	.01	13.70	10.90	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.09	7.06	6.99	6.97	6.93	6.90	6.88	.01	
	.25	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.69	1.68	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	.25	
	.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.68	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.52	2.51	2.50	2.49	2.48	2.48	2.47	.10	7
7	.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.27	3.25	3.24	3.23	.05	
	.01	12.20	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.86	5.82	5.75	5.74	5.70	5.67	5.65	.01	
	.25	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.63	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58	1.58	1.58	1.58	1.58	.25	
	.10	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.52	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.32	2.31	2.30	2.29	.10	8
8	.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	2.02	3.01	2.97	2.97	2.95	2.94	2.93	.05	
	.01	11.30	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.07	5.03	4.96	4.95	4.91	4.88	4.86	.01	
	.25	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	.25	
	.10	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.40	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.22	2.21	2.19	2.18	2.17	2.17	2.16	.10	9
9	.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.76	2.75	2.73	2.72	2.71	.05	
	.01	10.60	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.52	4.48	4.42	4.40	4.36	4.33	4.31	.01	

UPPER PERCENTAGE POINTS OF THE F DISTRIBUTION (CONTINUED)

d.f. for denominator, N_2	Pr	d.f. for numerator N_1: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Pr	d.f. for denominator N_2
10	.25	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54	1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49	1.49	1.49	1.48	1.48	.25	10
	.10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.30	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.12	2.11	2.09	2.08	2.07	2.06	2.06	.10	
	.05	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.62	2.59	2.58	2.56	2.55	2.54	.05	
	.01	10.00	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.08	4.01	4.00	3.96	3.93	3.91	.01	
11	.25	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.47	1.46	1.46	1.46	1.45	1.45	.25	11
	.10	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.03	2.00	2.00	1.99	1.98	1.97	.10	
	.05	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.46	2.45	2.43	2.42	2.40	.05	
	.01	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.81	3.78	3.71	3.69	3.68	3.62	3.60	.01	
12	.25	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.44	1.43	1.43	1.43	1.42	1.42	.25	12
	.10	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.17	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.90	.10	
	.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.38	2.35	2.34	2.32	2.31	2.30	.05	
	.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.57	3.54	3.47	3.45	3.41	3.38	3.36	.01	
13	.25	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40	1.40	.25	13
	.10	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.12	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.90	1.88	1.88	1.86	1.85	1.85	.10	
	.05	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.30	2.26	2.25	2.23	2.22	2.21	.05	
	.01	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.38	3.34	3.27	3.25	3.22	3.19	3.17	.01	
14	.25	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40	1.39	1.39	1.39	1.38	1.38	.25	14
	.10	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.08	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.87	1.86	1.83	1.83	1.82	1.80	1.80	.10	
	05	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.22	2.19	2.18	2.16	2.14	2.13	.05	
	01	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.22	3.18	3.11	3.09	3.06	3.03	3.00	.01	
15	.25	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.44	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.38	1.37	1.37	1.36	1.36	.25	15
	.10	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.79	1.77	1.76	1.76	10	
	.05	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.16	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07	.05	
	.01	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.05	2.98	2.96	2.92	2.89	2.87	.01	
16	.25	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.44	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.37	1.36	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	.25	16
	.10	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	2.01	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.79	1.78	1.76	1.75	1.74	1.73	1.72	.10	
	.05	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.11	2.07	2.06	2 04	2.02	2.01	05	
	.01	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.97	2.93	2.86	2.84	2.81	2.78	2.75	.01	
17	.25	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	1.34	1.33	1.33	.25	17
	.10	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.98	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.76	1.75	1.73	1.72	1.71	1.69	1.69	.10	
	.05	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.06	2.02	2.01	1.99	1.97	1.96	.05	
	.01	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.87	2.83	2.76	2.75	2.71	2.68	2.65	.01	
18	.25	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.34	1.33	1.33	1.32	1.32	1.32	.25	18
	.10	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.96	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.74	1.72	1.70	1.69	1.68	1.67	1.66	.10	
	.05	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.98	1.97	1.95	1.93	1.92	.05	
	.01	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.78	2.75	2.68	2.66	2.62	2.59	2.57	.01	
19	.25	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.32	1.31	1.31	1.30	.25	19
	.10	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.94	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.71	1.70	1.67	1.67	1.65	1.64	1.63	.10	
	.05	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.94	1.93	1.91	1.89	1.88	05	
	.01	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.71	2.67	2.60	2.58	2.55	2.51	2.49	.01	
20	.25	1.40	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	.25	20
	.10	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.92	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.69	1.68	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61	.10	
	05	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	.05	
	.01	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.61	2.54	2.52	2.48	2.44	2.42	01	

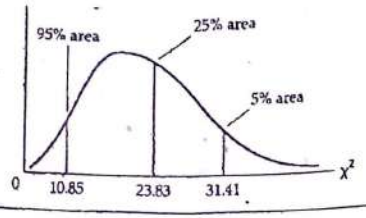
UPPER PERCENTAGE POINTS OF THE F DISTRIBUTION (CONTINUED)

d.f. for denominator N_2	Pr	d.f. for numerator N_1: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Pr	d.f. for denominator N_2
22	.25	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.30	1.29	1.29	1.28	.25	
	.10	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.88	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	.10	22
	.05	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.89	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78	.05	
	.01	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.50	2.42	2.40	2.36	2.33	2.31	.01	
24	.25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.37	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27	1.27	1.26	.25	
	.10	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53	.10	24
	.05	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73	.05	
	.01	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.40	2.33	2.31	2.27	2.24	2.21	.01	
26	.25	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.28	1.26	1.26	1.26	1.25	1.25	.25	
	.10	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.84	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.59	1.58	1.55	1.54	1.53	1.51	1.50	.10	26
	.05	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.80	1.76	1.75	1.73	1.71	1.69	.05	
	.01	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.36	2.33	2.25	2.23	2.19	2.16	2.13	.01	
28	.25	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.27	1.26	1.25	1.25	1.24	1.24	.25	
	.10	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.81	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.57	1.56	1.53	1.52	1.50	1.49	1.48	.10	28
	.05	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.73	1.71	1.69	1.67	1.65	.05	
	.01	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.26	2.19	2.17	2.13	2.09	2.06	.01	
30	.25	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34	1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.26	1.25	1.24	1.24	1.23	1.23	.25	
	.10	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.79	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.55	1.54	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	.10	30
	.05	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.70	1.68	1.66	1.64	1.62	.05	
	.01	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.25	2.21	2.13	2.11	2.07	2.03	2.01	.01	
40	.25	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.23	1.22	1.21	1.21	1.20	1.19	1.19	.25	
	.10	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.73	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38	.10	40
	.05	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.59	1.58	1.55	1.53	1.51	.05	
	.01	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.06	2.02	1.94	1.92	1.87	1.83	1.80	.01	
60	.25	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29	1.27	1.25	1.24	1.22	1.21	1.20	1.19	1.17	1.17	1.16	1.15	1.15	.25	
	.10	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.68	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.41	1.40	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29	.10	60
	.05	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.53	1.48	1.47	1.44	1.41	1.39	.05	
	.01	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.88	1.84	1.75	1.73	1.68	1.63	1.60	.01	
120	.25	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.24	1.22	1.21	1.19	1.18	1.17	1.16	1.14	1.13	1.12	1.11	1.10	.25	
	.10	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.34	1.32	1.27	1.26	1.24	1.21	1.19	.10	120
	.05	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.37	1.35	1.32	1.28	1.25	.05	
	.01	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.40	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.70	1.66	1.56	1.53	1.48	1.42	1.38	.01	
200	.25	1.33	1.39	1.38	1.36	1.34	1.32	1.31	1.29	1.28	1.27	1.26	1.25	1.23	1.21	1.20	1.18	1.16	1.14	1.12	1.11	1.10	1.09	1.08	1.06	.25	
	.10	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63	1.60	1.57	1.52	1.46	1.42	1.38	1.34	1.31	1.28	1.24	1.22	1.20	1.17	1.14	.10	200
	.05	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80	1.72	1.62	1.57	1.52	1.46	1.41	1.39	1.32	1.29	1.26	1.22	1.19	.05	
	.01	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.27	2.13	1.97	1.89	1.79	1.69	1.63	1.58	1.48	1.44	1.39	1.33	1.28	.01	
∞	.25	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.24	1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.13	1.12	1.09	1.08	1.07	1.04	1.00	.25	
	.10	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.57	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.26	1.24	1.18	1.17	1.13	1.08	1.00	.10	∞
	.05	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.24	1.22	1.17	1.11	1.00	.05	
	.01	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.52	1.47	1.36	1.32	1.25	1.15	1.00	.01	

UPPER PERCENTAGE POINTS OF THE χ^2 DISTRIBUTION

Example

$\Pr(\chi^2 > 10.85) = 0.95$
$\Pr(\chi^2 > 23.83) = 0.25$ for d.f. = 20
$\Pr(\chi^2 > 31.41) = 0.05$



Degrees of Freedom \ Pr	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005
1	392704×10^{-10}	157088×10^{-9}	982069×10^{-9}	393214×10^{-8}	.0158	.1015	.4549	1.3233	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.879
2	.0100	.0201	.0506	.1026	.2107	.5754	1.3863	2.7726	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.596
3	.0717	.1148	.2158	.3518	.5844	1.2125	2.3660	4.1084	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8381
4	.2070	.2971	.4844	.7107	1.0636	1.9226	3.3567	5.3853	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8602
5	.4117	.5543	.8312	1.1455	1.6103	2.6746	4.3515	6.6257	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	.6757	.8721	1.2373	1.6354	2.2041	3.4546	5.3481	7.8408	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	.9893	1.2390	1.6899	2.1674	2.8331	4.2549	6.3458	9.0372	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	5.0706	7.3441	10.2188	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	5.8988	8.3428	11.3887	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	6.7372	9.3418	12.5489	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882
11	2.6032	3.0535	3.8158	4.5748	5.5778	7.5841	10.3410	13.7007	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	8.4384	11.3403	14.8454	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.5650	4.1069	5.0087	5.8919	7.0415	9.2991	12.3398	15.9839	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	10.1653	13.3393	17.1170	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193
15	4.6009	5.2294	6.2621	7.2609	8.5468	11.0365	14.3389	18.2451	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	11.9122	15.3385	19.3688	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	12.7919	16.3381	20.4887	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.2648	7.0149	8.2308	9.3905	10.8649	13.6753	17.3379	21.6049	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564
19	6.8440	7.6327	8.9066	10.1170	11.6509	14.5620	18.3376	22.7178	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822
20	7.4339	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	15.4518	19.3374	23.8277	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	16.3444	20.3372	24.9348	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	17.2396	21.3370	26.0393	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956
23	9.2604	10.1957	11.6885	13.0905	14.8479	18.1373	22.3369	27.1413	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813
24	9.8862	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587	19.0372	23.3367	28.2412	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366	29.3389	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919	20.8434	25.3364	30.4345	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138	21.7494	26.3363	31.5284	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392	22.6572	27.3363	32.6205	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677	23.5666	28.3362	33.7109	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992	24.4776	29.3360	34.7998	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505	33.6603	39.3354	45.6160	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	42.9421	49.3349	56.3336	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589	52.2938	59.3347	66.9814	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290	61.6983	69.3344	77.5766	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778	71.1445	79.3343	88.1303	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912	80.6247	89.3342	98.6499	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581	90.1332	99.3341	109.141	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

DURBIN–WATSON d STATISTIC: SIGNIFICANCE POINTS OF d_L AND d_U AT 0.05 LEVEL OF SIGNIFICANCE

	$k' = 1$		$k' = 2$		$k' = 3$		$k' = 4$		$k' = 5$		$k' = 6$		$k' = 7$		$k' = 8$		$k' = 9$		$k' = 10$	
n	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0.610	1.400	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0.700	1.356	0.467	1.896	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.368	2.287	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	0.927	1.324	0.658	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.316	2.645	0.203	3.005	—	—	—	—	—	—	—	—
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.379	2.506	0.268	2.832	0.171	3.149	—	—	—	—	—	—
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.445	2.390	0.328	2.692	0.230	2.985	0.147	3.266	—	—	—	—
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296	0.389	2.572	0.286	2.848	0.200	3.111	0.127	3.360	—	—
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220	0.447	2.472	0.343	2.727	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157	0.502	2.388	0.398	2.624	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104	0.554	2.318	0.451	2.537	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060	0.603	2.257	0.502	2.461	0.407	2.667	0.321	2.873	0.244	3.073
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023	0.649	2.206	0.549	2.396	0.456	2.589	0.369	2.783	0.290	2.974
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991	0.692	2.162	0.595	2.339	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964	0.732	2.124	0.637	2.290	0.547	2.460	0.461	2.633	0.380	2.806
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940	0.769	2.090	0.677	2.246	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.734
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920	0.804	2.061	0.715	2.208	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902	0.837	2.035	0.751	2.174	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886	0.868	2.012	0.784	2.144	0.702	2.280	0.621	2.419	0.544	2.560
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873	0.897	1.992	0.816	2.117	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861	0.925	1.974	0.845	2.093	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850	0.951	1.958	0.874	2.071	0.798	2.188	0.723	2.309	0.650	2.431
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841	0.975	1.944	0.900	2.052	0.826	2.164	0.753	2.278	0.682	2.396
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833	0.998	1.931	0.926	2.034	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825	1.020	1.920	0.950	2.018	0.879	2.120	0.810	2.226	0.741	2.333
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819	1.041	1.909	0.972	2.004	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813	1.061	1.900	0.994	1.991	0.927	2.085	0.861	2.181	0.795	2.281
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808	1.080	1.891	1.015	1.979	0.950	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803	1.097	1.884	1.034	1.967	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799	1.114	1.877	1.053	1.957	0.991	2.041	0.930	2.127	0.868	2.216
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795	1.131	1.870	1.071	1.948	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.198
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792	1.146	1.864	1.088	1.939	1.029	2.017	0.970	2.098	0.912	2.180
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789	1.161	1.859	1.104	1.932	1.047	2.007	0.990	2.085	0.932	2.164
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786	1.175	1.854	1.120	1.924	1.064	1.997	1.008	2.072	0.952	2.149
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776	1.238	1.835	1.189	1.895	1.139	1.958	1.089	2.022	1.038	2.088
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771	1.291	1.822	1.246	1.875	1.201	1.930	1.156	1.986	1.110	2.044
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768	1.334	1.814	1.294	1.861	1.253	1.909	1.212	1.959	1.170	2.010
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767	1.372	1.808	1.335	1.850	1.298	1.894	1.260	1.939	1.222	1.984
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767	1.404	1.805	1.370	1.843	1.336	1.882	1.301	1.923	1.266	1.964
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768	1.433	1.802	1.401	1.837	1.369	1.873	1.337	1.910	1.305	1.948
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770	1.458	1.801	1.428	1.834	1.399	1.867	1.369	1.901	1.339	1.935
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772	1.480	1.801	1.453	1.831	1.425	1.861	1.397	1.893	1.369	1.925
85	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774	1.500	1.801	1.474	1.829	1.448	1.857	1.422	1.886	1.396	1.916
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776	1.518	1.801	1.494	1.827	1.469	1.854	1.445	1.881	1.420	1.909
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778	1.535	1.802	1.512	1.827	1.489	1.852	1.465	1.877	1.442	1.903
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780	1.550	1.803	1.528	1.826	1.506	1.850	1.484	1.874	1.462	1.898
150	1.720	1.746	1.706	1.760	1.693	1.774	1.679	1.788	1.665	1.802	1.651	1.817	1.637	1.832	1.622	1.847	1.608	1.862	1.594	1.877
200	1.758	1.778	1.748	1.789	1.738	1.799	1.728	1.810	1.718	1.820	1.707	1.831	1.697	1.841	1.686	1.852	1.675	1.863	1.665	1.874